

# Des zigzags, des pavages et des constructions

– à partir des classes du Collège –

Henri Bareil<sup>(\*)</sup>

## 1 - TRIANGLES ET PAVAGES DE POLYGONES

### 1. DU TRIANGLE ISOCÈLE A UN POLYGONE DE ...

#### A – D'UN ZIGZAG À UN TRIANGLE ISOCÈLE

*PROBLÈME.* Est-il possible d'obtenir un triangle isocèle OBC ( $OB = OC$ ) tel que, avec M sur [OB] et N sur [OC], on ait  $OM = MN = NB = BC$ .

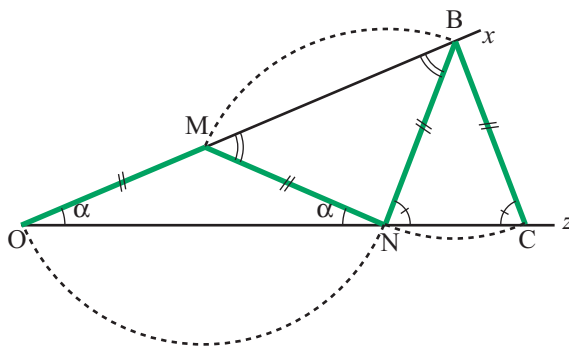


Figure-schéma 1

La « figure-schéma » est un exemple de figure « plausible » proposée – avant toute résolution du problème – après quelques essais...

#### OUTILS DE RÉOLUTION :

1. Exprimer le caractère « isocèle » des trois triangles successifs MON, MNB, BNC par l'égalité des angles à la base.
2. Faire jouer l'appui du zigzag sur les côtés OB et OC en utilisant le théorème – non indispensable, mais à effets rapides – sur « l'angle extérieur d'un triangle » (égal à la somme des deux « angles intérieurs non adjacents »).

*DÉVELOPPEMENT*, à partir de  $\widehat{BOC} = \alpha$  :

- Triangle MON  $\rightarrow \widehat{MNO} = \alpha$ , puis  $\widehat{BMN} = 2\alpha$ .
- Triangle NMB  $\rightarrow \widehat{NBM} = \widehat{BMN} = 2\alpha$ .

(\*) Institut du Lauragais.

Triangle ONB  $\rightarrow \widehat{CNB} = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$ .

Triangle BNC  $\rightarrow \widehat{BCN} = \widehat{CNB} = 3\alpha$ .

Triangle OBC  $\rightarrow \widehat{CBx} = \alpha + 3\alpha = 4\alpha$ .

D'où  $\widehat{OBC} = \pi - 4\alpha$ .

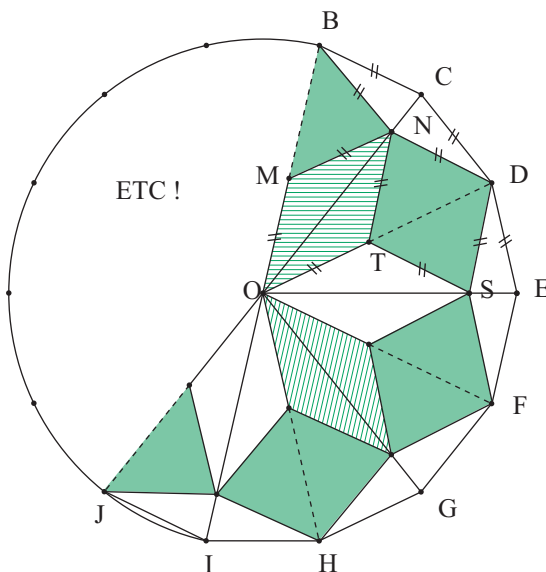
- Imposons au triangle OBC d'être isocèle :  
 $3\alpha = \pi - 4\alpha$ , c'est-à-dire  $\alpha = \pi/7$  ( $\alpha \approx 25,7^\circ$ ).

### B – DU TRIANGLE ISOCÈLE AU ZIGZAG

*PROBLÈME.* Étant donné un triangle isocèle OBC, de base BC, construire le zigzag OMNBC précédemment défini.

- – Pas de solution si  $\widehat{BOC} \neq \pi/7$ .
- Si  $\widehat{BOC} = \pi/7$ , la longueur BC donne celle des maillons du zigzag.
- J'appellerai de même **iso-zigzag** associé à un triangle isocèle le zigzag défini par une suite de maillons égaux entre eux (base comprise).

### C – PAVAGE D'UN POLYGONE RÉGULIER CONVEXE DE 14 SOMMETS



La figure 2 esquisse ce polygone *et sa partition à l'aide d'angles au centre  $\pi/7$* . Cette partition a été réalisée au rapporteur. Approximative, elle l'est moins que toute « construction » manuelle à la règle et au compas ! Pour diminuer l'approximation, comme  $(\pi/7) \times 3$  est, en degrés, très voisine de  $77^\circ$ , il peut être tracé trois angles successifs de, par exemple,  $25,5^\circ$ ,  $26^\circ$ ,  $25,5^\circ$ , ce qui limite la « casse »...

À partir d'un iso-zigzag initial, sur OBC, on peut compléter par des symétries successives (orthogonales, centrales, toujours à partir d'un zigzag ou, peu à peu, par « paquets »...).

Ainsi les triangles isocèles sont-ils « doublés » en losanges dont les angles aigus sont respectivement (cf. figure 1) :  $2\alpha$  (soit  $2\pi/7$ ),  $\pi - 4\alpha$  (soit  $3\pi/7$ ),  $\pi - 6\alpha$  (soit  $\pi/7$ ). Les losanges sont donc de trois types.

REMARQUE : Le losange NDST, « voisin » d'un carré, serait un carré si et seulement si  $\widehat{MNO} + \widehat{BNC} = \pi/2$ , soit  $\alpha + 3\alpha = \pi/2$ , i.e.  $\alpha = \pi/8$ ... Mais que serait alors OBC ?

## 2. DU TRIANGLE RECTANGLE À UN POLYGONE DE ...

A – D'UN ZIGZAG À UN TRIANGLE RECTANGLE :

PROBLÈME : Le même qu'au l.A., en remplaçant seulement « triangle isocèle OBC » par « triangle OBC rectangle en B ».

CLÉS : Il n'y a rien de changé pour les valeurs « en  $\alpha$  » de la figure 1. Et l'orthogonalité en B se traduit par  $4\alpha = \pi/2$ , soit  $\alpha = \pi/8$  ( $\alpha = 22,5^\circ$ ) (Tiens ! Cf. remarque précédente : effets à conjuguer !).

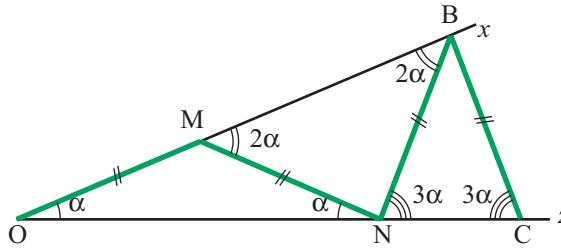


Figure 3

B – DU TRIANGLE RECTANGLE AU ZIGZAG :

PROBLÈME : Étant donné un triangle OBC, rectangle en B, construire le zigzag OMNBC précédemment défini.

- – Pas de solution si  $\widehat{BOC} \neq \pi/8$ .
- – Si  $\widehat{BOC} = \pi/8$ , la longueur BC donne celle des maillons du zigzag.
- J'appellerai de même **iso-zigzag** associé à un triangle rectangle le zigzag défini par une suite de maillons égaux entre eux, côté du triangle compris.

C – VERS UN PAVAGE DE POLYGONE :

Insérons la figure 3 dans un angle au centre de  $22,5^\circ$  d'un polygone régulier (angle réalisable à partir de  $90^\circ$ , par des bissectrices), et dupliquons par des symétries successives (cf. figure 4).

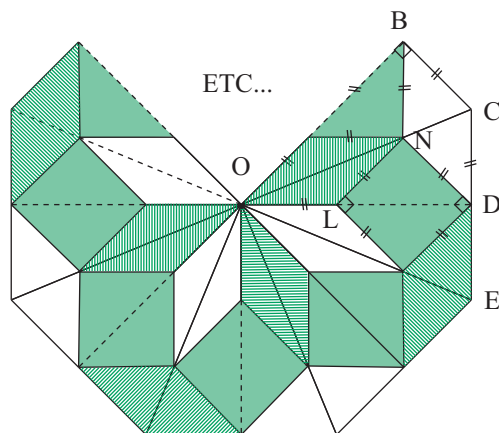


Figure 4

Nous pavons ainsi un octogone, régulier convexe, par des losanges. Les uns sont des carrés. Les autres ont tous  $\pi/4$  comme angle aigu. Ils sont donc isométriques. Il y a donc seulement deux types de losanges dont un de carrés.

## II – ANGLES ET ZIGZAGS

### 1. UN ANGLE ET UNE PÉPINIÈRE DE ZIGZAGS

*SITUATION* : Je généralise les iso-zigzags précédents :

Soit deux droites  $x'x$  et  $z'z$  sécantes en  $A_1$ .

Le cercle  $(A_1, R)$  coupe  $[A_1x]$  en  $A_2$ .

Le cercle  $(A_2, R)$  recoupe  $[A_1z]$  en  $A_3$ .

Le cercle  $(A_3, R)$  recoupe  $[A_1x]$  en  $A_4$ .

Etc. Cf. figure 5 :

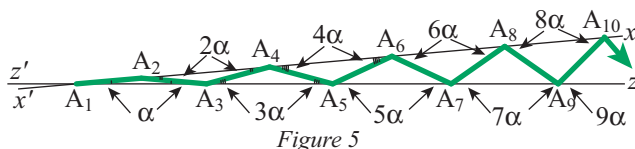


Figure 5

*CONSÉQUENCES* : Avec les outils initiaux, nous obtenons immédiatement deux suites arithmétiques d'angles signalés sur la figure 5 :

En  $A_2, A_4, A_6, A_8, \dots$  les angles successifs  $2\alpha, 4\alpha, 6\alpha, 8\alpha, \dots$

En  $A_3, A_5, A_7, A_9, \dots$  les angles successifs  $3\alpha, 5\alpha, 7\alpha, 9\alpha, \dots$

L'hérédité dans les calculs, par son évidence, ne me semble même pas exiger une démonstration par récurrence.

### 2. DES QUESTIONS :

*QUESTION 1* :

Ces suites se prolongent-elles indéfiniment en s'éloignant toujours de  $A_1$  ?

Octave pense que oui. Lucie lui objecte que les angles successifs ne peuvent pas dépasser  $180^\circ$ . Sophie s'inquiète davantage : peuvent-ils même dépasser  $90^\circ$  ?

*Lecteurs, qu'en pensez-vous ?*

**QUESTION 2 :**

Pouvons-nous retrouver des cas analogues à ceux du 1 ?

– DES TRIANGLES ISOCÈLES [de « sommet »  $A_1$ ]

$A_1A_2A_3$  isocèle :  $\pi - 2\alpha = \alpha$ , soit  $\alpha = \pi/3$ .

$A_1A_3A_4$  isocèle :  $\pi - 3\alpha = 2\alpha$ , soit  $\alpha = \pi/5$ .

$A_1A_4A_5$  isocèle :  $\pi - 4\alpha = 3\alpha$ , soit  $\alpha = \pi/7$  (cas du 1.1.).

$A_1A_5A_6$  isocèle :  $\pi - 5\alpha = 4\alpha$ , soit  $\alpha = \pi/9$ .

De façon générale, il faut et il suffit que  $\alpha = \pi/n$ , avec  $n$  entier **impair** supérieur à 2.

*Chacun de ces cas où  $\alpha = \pi/n$  ( $n$  **impair**...) :*

- associe au triangle isocèle d'angle au sommet  $\pi/n$  un iso-zigzag de  $(n + 1)/2$  maillons, base comprise,
- induit, à partir de cet iso-zigzag, le pavage, par des losanges, d'un polygone régulier convexe de  $2n$  côtés.

– DES TRIANGLES RECTANGLES ?

(Le premier sommet nommé sera celui de l'angle droit)

$A_1A_2A_3$  rectangle :  $\alpha = \pi/2$  (et triangle aplati !).

$A_2A_1A_3$  rectangle :  $2\alpha = \pi/2$ , soit  $\alpha = \pi/4$ .

$A_3A_1A_4$  rectangle :  $3\alpha = \pi/2$ , soit  $\alpha = \pi/6$ .

$A_4A_1A_5$  rectangle :  $4\alpha = \pi/2$ , soit  $\alpha = \pi/8$  (cas du 1.1.).

$A_5A_1A_6$  rectangle :  $5\alpha = \pi/2$ , soit  $\alpha = \pi/10$ .

De façon générale, il faut et il suffit que  $\alpha = \pi/n$ , avec  $n$  entier **pair** (non nul, bien sûr).

*Chacun de ces cas où  $\alpha = \pi/n$  ( $n$  **pair**...) :*

- associe au triangle rectangle d'angle au sommet  $\pi/n$  un iso-zigzag de  $n/2$  maillons, côté du triangle compris,
- induit, à partir de cet iso-zigzag, le pavage, par des losanges, d'un polygone régulier convexe de  $n$  côtés.

**QUESTION 3 :**

*Peut-on, à partir d'un angle et de ses iso-zigzags, envisager d'autres pavages de polygones réguliers ?*

**Il faut que  $\alpha$  soit « angle au centre »** donc tel que  $\alpha = 2\pi/p$  avec  $p$  entier strictement positif.

**Le cas  $p$  pair nous donne les pavages déjà traités.**

**Envisageons  $p$  impair.**

**Par exemple avec  $\alpha = 2\pi/17$**  (qui pourrait correspondre au célèbre polygone de 17 côtés constructible à la règle et au compas).

**a) Damien esquisse un pavage :**

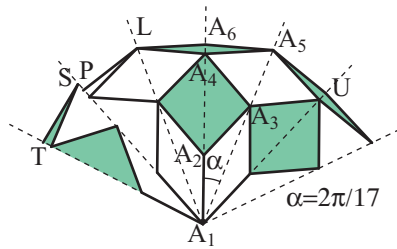


Figure 6

Il utilise un iso-zigzag, complété par des symétries...

– Et voilà! dit-il, j'ai pavé, par des losanges, le polygone de 17 côtés...

– Ah non ! objecte Claire : en groupant par deux les angles au centre  $\alpha$  il en reste un isolé, ci-dessus (figure 6)  $\widehat{PA_1L}$ . Donc on n'a pas que des losanges !

– D'accord, approuve Damien : je pave avec des triangles isocèles...

– Paver quoi ? précise Odile : tu n'as même pas un polygone régulier : regarde le « glissement » [SP] de l'angle au centre « en trop » !

– Je capitule ! Dommage !

– Très bien, poursuit Odile. D'autant que si les côtés successifs  $LA_6, A_6A_5, \dots$  sont égaux, sais-tu que les angles successifs (par exemple  $\widehat{LA_6A_5}$  et  $\widehat{A_6A_5U}$ ) ne le sont pas ? (En  $A_6$ , angle de  $8\alpha$ , soit  $16\pi/17$  et, en  $A_5$ , angle de  $2\pi - 10\alpha$ , soit  $14\pi/17$ .)

b) Il existe, bien entendu, des pavages des polygones de 17 côtés par exemple en respectant les axes de symétrie des angles au centre de  $2\pi/17$ .

c) **Exploitant cette idée, Sophie propose d'utiliser, en dupliquant ensuite par symétrie, un angle au centre de  $\pi/17$  et son iso-zigzag associé au triangle isocèle obtenu.**

– Bravo, Sophie ?...

– Ah non, dit Damien, elle a un polygone de 34 côtés et, si je veux ramener à 17, je décapite tous les losanges des bords !

Il faudra autre chose que nos iso-zigzags...

### 3. DES ESSAIS POUR LA QUESTION 1 :

#### • AVEC $\alpha = \pi/7$

Reprenons une figure 1, cette fois correcte (autant que possible !). Cf. figure 7.

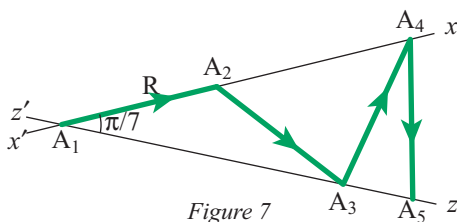
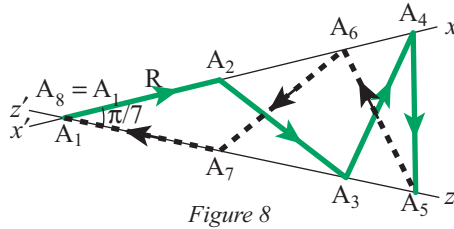


Figure 7

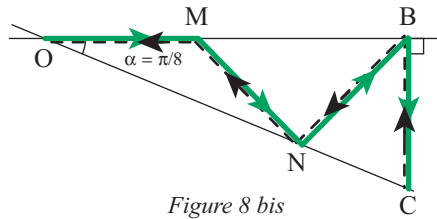
L'iso-zigzag vert  $A_1A_2A_3A_4A_5$  se prolonge par le tracé du cercle  $(A_5, R)$  qui, passant déjà par  $A_4$ , recoupera la droite  $xx'$  en  $A_6$ .  
 Mais voilà que  $A_6$ , au lieu de s'éloigner de  $A_1$  s'en rapproche !  
 D'où la figure 8 :



Comme les cercles  $(A_4, R)$  et  $(A_5, R)$  relèvent de la symétrie qui caractérise le triangle isocèle  $A_1A_4A_5$ , il s'initie ainsi un iso-zigzag symétrique du premier et qui, de  $A_5$ , nous ramène en  $A_1$ .  
 Il en ira ainsi pour tous les  $\alpha = \pi/n$  avec  $n$  impair.

• AVEC  $\alpha = \pi/8$

Reprenons la figure 3, ci-après figure 8 bis.



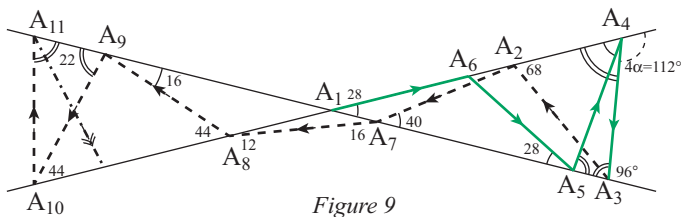
La suite du zigzag appelle le tracé du cercle  $(C, CB)$  qui, étant tangent à  $(xx')$  **la recoupe en ... B.**

Puis, le cercle  $(B, CB)$  recoupe  $(zz')$  en N. Etc.

Ainsi refait-on, en sens inverse, le zigzag initial. Il en ira ainsi pour tous les  $\alpha = \pi/n$  avec  $n$  pair.

• AVEC  $\alpha \neq \pi/n$

Par exemple, pour  $\alpha = 28^\circ$  (figure 9).



Cette fois, on rebrousse chemin à partir du cercle  $(A_5, R)$ , mais sans symétrie par rapport au zigzag initial. Si bien que le cercle  $(A_7, R)$  nous fait passer de  $A_7$  à  $A_8$ , en « sautant » par dessus  $A_1$  et en utilisant des demi-droites  $[A_1z')$  et  $[A_1x')$ .  
On continue, toujours selon le même algorithme, ce qui éloigne de  $A_1$ .

Mais il y a un nouveau rebroussement à partir de  $A_{11}$ . La suite montrerait qu'on va à nouveau « sauter »  $A_1$  et revenir sur  $[A_1x)$  et  $[A_1z)$ , ... sans symétrie par rapport à  $A_1$ , ... et qu'on va encore ensuite rebrousse chemin...

#### • QUAND Y A-T-IL REBROUSSEMENT ?

Quand il s'agit de repartir de  $A_{p+1}$  (figure 10), il y a un rebroussement dès lors que  $A_{p+1}$  se projette entre  $A_1$  et  $A_p$ , donc si et seulement si  $p\alpha \geq \pi/2$ .

Sophie a failli avoir raison ! Mais pas tout à fait :  
 $p\alpha$  peut dépasser  $90^\circ$  mais, dès qu'il y a un dépassement, cela induit un rebroussement pour la suite.

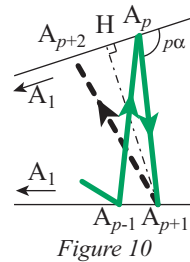


Figure 10

#### REMARQUE DE DESSIN

Au voisinage du rebroussement, le cercle utilisé est souvent presque tangent à la droite qu'il doit couper. De là une difficulté à situer, par le dessin, les points d'intersection. Ainsi, ci-dessus pour le cercle de centre  $A_{p+1}$ , qui passe par  $A_p$ . Il est alors commode de tracer la perpendiculaire  $(A_{p+1}H)$  à  $(A_pA_1)$  et de symétriser  $A_p$  par rapport à  $H$  en  $A_{p+2}$ .

#### 4. LES ISO-ZIGZAGS SE FERMENT-ILS ?

##### • Nous avons vu que :

- $\alpha = \pi/n$  :  $n$  impair ( $> 1$ ) enclenche un zigzag symétrique de l'initial, avec retour en  $A_1$ .
- $\alpha = \pi/n$  :  $n$  pair, enclenche un zigzag qui, avec un cheminement en sens inverse suit le premier et ramène donc en  $A_1$ .

**Sinon**, essayez avec un logiciel de géométrie dynamique à qui vous aurez inculqué l'algorithme des cercles successifs ... et vous constaterez que :

- Il y a parfois assez rapidement fermeture.

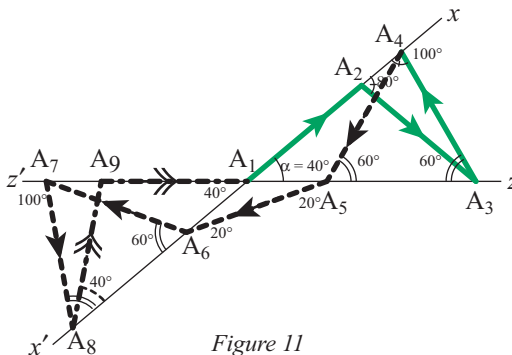


Figure 11



Ainsi pour  $\alpha = \frac{2}{9}\pi$  où les zigzags « à gauche » de  $A_1$  symétrisent les premiers, situés à droite (figure 11).

Pour  $\alpha = \frac{2}{9}\pi$ ,  $A_{10} = A_1$ . On a « fermé » !

- En général, il n'apparaît pas rapidement de fermeture avec  $\alpha = \frac{p}{q}\pi$ ,  $\frac{p}{q}$  rationnel.
- Et si  $\alpha = \pi \times k$ ,  $k$  réel non rationnel ?

Dans le cadre de la rubrique « Dans nos classes », laissons le problème ouvert ! Et si les habituels partenaires de François Lo Jacomo veulent s'y coller...

### III. ISO-ZIGZAGS ET CONSTRUCTIONS<sup>(1)</sup>

#### 1. PARTAGE D'UN ANGLE

##### 1.1. Iso-zigzag à deux maillons

La bissection de l'angle  $\widehat{A_3A_2x}$  se déduit aisément de la figure 12.

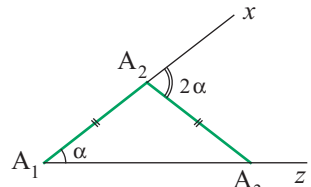


Figure 12

##### 1.2. Trisection d'un angle

Pour obtenir  $\alpha/3$  à partir de  $\alpha$  (cf. figure 13), reconstruisons cette figure à partir de  $\widehat{zA_3A_4}$  (=  $\alpha$ ).

Les diverses méthodes classiques **esquissées** ci-après se retrouvent, notamment, dans la brochure APMEP n° 70, de Jean AYMÈS, sur la trisection de l'angle (Titre : *Ces problèmes qui font les mathématiques*).

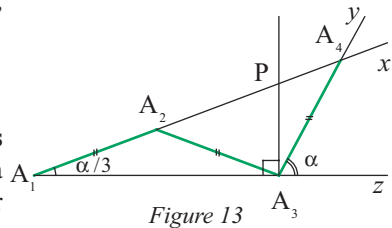


Figure 13

**Méthode 1** : « La trisectrice de Mac-Laurin ».

Avec  $A_1$  et  $A_3$  fixes, la variation de  $\alpha/3$  engendre un lieu géométrique de  $A_4$  : la trisectrice de Mac-Laurin. La donnée de  $\alpha$  fixe  $[A_3y)$  dont l'intersection avec la trisectrice donne  $A_4$ . De là  $\alpha/3$ .

**Méthode 2** : Soit  $\alpha$  donné en  $\widehat{zA_3A_4}$ .

$A_2$  est d'une part sur le cercle  $(A_3, A_3A_4)$ , d'autre part sur la conchoïde de  $(A_3z)$ , de pôle  $A_4$ , de paramètre  $A_3A_4$ . D'où, ensuite,  $\alpha/3$ .

**Méthode 3** : Avec  $(A_3P) \perp (A_3z)$ , dans le triangle rectangle  $A_3A_1P$  le point  $A_2$  est le milieu de l'hypoténuse  $[A_1P]$ . Cette fois on peut considérer une conchoïde de  $(A_3P)$ .

(1) À l'initiative et selon des apports de Jean-Pierre FRIEDELMEYER.

**Remarque :** Comme le souligne la brochure précitée, les méthodes 2 et 3 obligent à des tracés de conchoïdes qui changent avec  $\alpha$ , alors que la trisectrice de méthode 1 est utilisable pour tous les  $\alpha$ .

**2. CALCULS DE CÔTÉS DE POLYGONES RÉGULIERS**

• **D'une part :** Avec  $\alpha = \pi/n$ ,  $[FG]$  est côté d'un polygone régulier de  $n$  côtés inscrit dans le cercle.

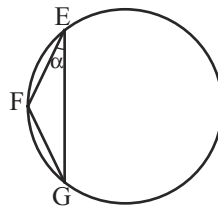


Figure 14

• **D'autre part :**

**Remarque générale sur les iso-zigzags fermés en triangles isocèles.**

Soit un iso-zigzag fermé en triangle isocèle  $A_1A_nA_{n+1}$ .

Posons  $A_1A_n = A_1A_{n+1} = 1$  et  $A_nA_{n+1} = x$ . Le triangle isocèle  $A_nA_{n-1}A_{n+1}$  formé par les deux derniers maillons est semblable au triangle isocèle  $A_1A_nA_{n+1}$ . De là  $A_{n-1}A_{n+1} = x^2$ .

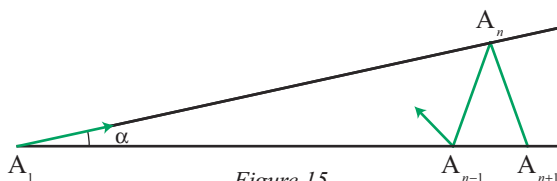


Figure 15

**2.1. CAS  $\alpha = \pi/5 \rightarrow$  CÔTÉ DU PENTAGONE**

Iso-zigzag fermé à trois maillons de longueur  $x$ , avec

$$A_1A_3 = A_1A_4 = 1.$$

D'une part

$$A_2A_4 = 1 - x.$$

D'autre part

$$A_2A_4 = x^2.$$

D'où  $x$  est donné par

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

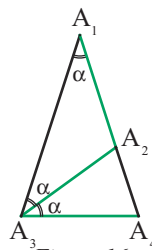


Figure 16

**2.2. CAS  $\alpha = \pi/7 \rightarrow$  CÔTÉ DE L'HEXAGONE**

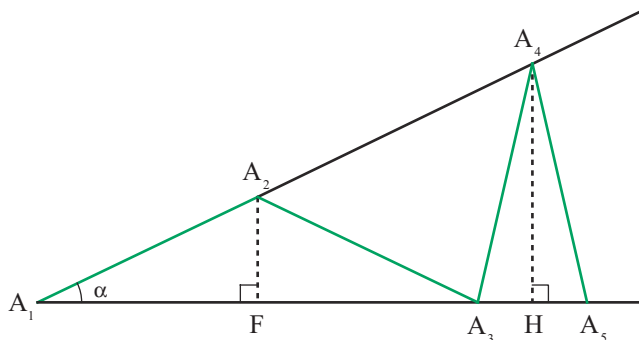


Figure 17

Iso-zigzag fermé à quatre maillons de longueur  $x$ , avec  $A_1A_4 = A_1A_5 = 1$ .  
La similitude des triangles  $A_1A_2F$  et  $A_1A_4H$  (où  $A_3H = x^2/2$  et  $2A_1F = 1 - x^2$ ) conduit à :

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

2.1. CAS  $\alpha = \pi/9 \rightarrow$  CÔTÉ DE L'ENNÉAGONE

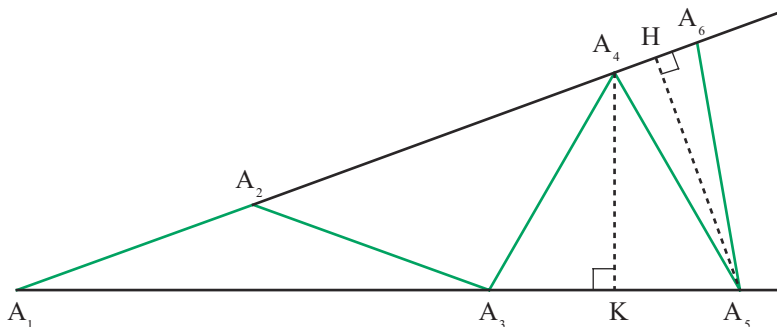


Figure 18

Iso-zigzag fermé en triangle isocèle à cinq maillons de longueur  $x$ .  
Notons d'abord que le triangle  $A_3A_4A_5$  a tous ses angles égaux à  $3\alpha$ . Il est équilatéral.

D'où  $A_1K = 1 - \frac{x^2}{2}$ .

La similitude des triangles  $A_1A_5H$  et  $A_1A_4K$  conduit ensuite à :

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

## BIBLIOGRAPHIE

- L'idée de cette étude (peut-être très classique ?) m'a été donnée par l'exercice 13 de la 18<sup>e</sup> compétition américaine « AIME » (et non pas LOVE...). Les 15 énoncés de cette compétition figurent dans le n° 128 (septembre-octobre 2000) de la revue belge « Mathématique et Pédagogie ». C'est là que j'ai trouvé le treizième...
- Article de 10 pages de Jean-Pierre FRIEDELMEYER : « **Les problèmes de fermeture** : une mine d'exercices à ouvrir en classe ». Bulletin n° 463, mars-avril 2006.
- Curieusement, en reprenant cette étude, j'avais oublié celle (à laquelle j'ai participé !) reproduite pages 155-161 de la Brochure APMEP n° 163 des Olympiades Académiques de 2004, premier sujet de Lyon. Il y a des recoupements (mise en place, avec 7 maillons à Lyon, et suites arithmétiques des « angles extérieurs »), sans plus.

## TRAVAUX INTERDISCIPLINAIRES

- Selon l'objectif poursuivi, à quel endroit d'un iso-zigzag mettre radar et alcootest ?
- Un iso-zigzag peut-il modéliser une campagne électorale ?