

# Jouer avec quatre points du plan

Julien Moreau

*Cet article propose une suite d'exercices sur les distances et les angles. Ils ont un solide fil conducteur commun, mais beaucoup peuvent être traités isolément. La plupart d'entre eux ne demandent que les connaissances du collège (l'appendice est du niveau lycée).*

*Le thème qu'ils abordent est étudié en détail dans [1], mais il est probablement plus ancien. Il a été utilisé en partie aux Olympiades académiques 2003 (Cf. [2]).*

## Introduction

Si les distances mutuelles de trois points sont deux à deux égales, leur configuration est bien connue : triangle équilatéral.

### Peut-on trouver dans le plan quatre points ayant la même propriété ?

Supposons que quatre points  $A, B, C, D$  aient des distances mutuelles toutes égales à  $p$ . Les deux triangles  $ABC$  et  $ABD$  sont équilatéraux et, puisque  $C$  et  $D$  sont distincts, ces triangles sont symétriques par rapport à  $(AB)$  : la distance  $CD$  vaut deux fois la hauteur des triangles, soit  $p\sqrt{3}$ .

La réponse est donc *non*. Mais on a en même temps prouvé qu'on peut, et d'une seule façon (à une isométrie près) construire quatre points dont les distances mutuelles sont toutes, sauf une, égales à une longueur donnée  $p$  et qu'alors la sixième distance est égale à  $p\sqrt{3}$ .

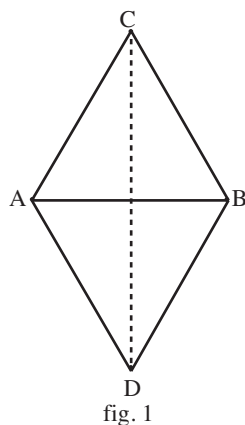
Nous allons maintenant assouplir nos exigences.

### Trouver quatre points dont quatre des distances mutuelles sont égales

Puisque nous avons réglé le cas où cinq au moins des distances sont égales, cherchons dans quels cas quatre d'entre elles au moins sont égales à  $p$ .

Une solution évidente est de disposer les points en losange. Mais ce n'est pas la seule. Si par exemple  $ABC$  est un triangle équilatéral de côté  $p$ , il suffit de placer un quatrième point  $D$  à la distance  $p$  de  $A$  pour avoir une solution.

Ce qui est plus délicat est de voir si ces deux types de solution sont les seuls. Supposons donc quatre points  $A, B, C, D$  tels que quatre des distances mutuelles soient égales à  $p$ . Considérons les deux segments dont les longueurs sont autres que  $p$  : ou bien ils ont une extrémité commune ou bien pas.



Dans le premier cas, disons que ce sont DC et DB. Alors les autres longueurs sont toutes égales à  $p$ . Le triangle ABC est donc équilatéral de côté  $p$ , avec en outre  $AD = p$ . C'est la situation que nous venons de décrire quelques lignes plus haut.

Plaçons-nous dans le second cas : en renommant les points, on peut toujours supposer que ce sont AC et BD qui ne sont pas de longueur  $p$ . Alors ABCD est un losange de côté  $p$ .

Les deux configurations trouvées sont donc les seules possibles.

N.B. : On peut raisonner autrement : on suppose, ce qui n'est pas restrictif, que AB est parmi les quatre longueurs égales à  $p$ . Pour examiner tous les cas possibles, il faut alors choisir trois longueurs égales à  $p$  parmi les cinq segments qui restent : AC, AD, BC, BD, CD. En examinant les dix choix possibles, on trouve deux losanges, trois situations avec le triangle équilatéral ABC, trois autres avec le triangle équilatéral ABD, et deux autres cas où AB est le segment ajouté au triangle équilatéral ACD ou BCD.

**Exigeons davantage : trouver quatre points dont quatre des distances mutuelles sont égales à  $p$ , les deux autres étant égales à  $q$  ( $q \neq p$ ).**

Dans le cas du losange, cela revient à exiger que ses diagonales soient de longueur  $q$ . Un losange à deux diagonales égales est un carré, qui constitue donc une solution, avec  $q = p\sqrt{2}$ .

Prenons maintenant le cas où ABC est équilatéral de côté  $p$ , avec  $AD = p$  ; nous voulons de plus que  $BD = CD = q$ . Cela revient à prendre D à la fois sur la médiatrice de BC et sur le cercle de centre A et de rayon  $p$ , ce qui donne deux positions possibles  $D'$  et  $D''$ . Pour calculer les valeurs correspondantes de  $q$ , on calcule d'abord DH, puis BD par application du théorème de Pythagore au triangle BHD.

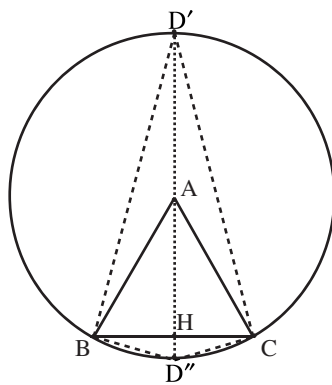


fig. 2

On aboutit ainsi à  $q = p\sqrt{2+\sqrt{3}}$  pour le point  $D'$  de la figure 2 et à  $q = p\sqrt{2-\sqrt{3}}$  pour le point  $D''$ .

Nous avons donc résolu le problème suivant :

*Étant donné une longueur  $p$ , pour quelles valeurs de la longueur  $q$  existe-t-il quatre points dont quatre des distances mutuelles sont égales à  $q$  et les deux autres égales à  $p$ , et comment sont alors placés ces points ?*

Cela nous amène à étudier la variante décrite ci-après.

**Trouver quatre points dont trois des distances mutuelles sont égales à une longueur  $p$  et les trois autres à une longueur différente  $q$ .**

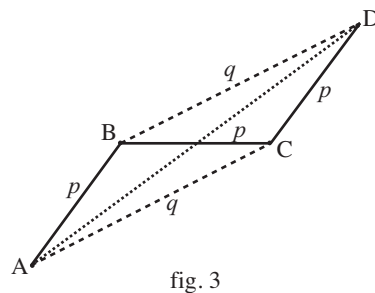
*Une solution évidente* (que trouvera toujours au moins un élève) est de prendre les sommets et le centre d'un triangle équilatéral, ce qui correspond à  $q = p\sqrt{3}$  ou  $q = p/\sqrt{3}$ .

*Supposons maintenant que nous ayons une solution autre*, ce qui revient à dire que, parmi les six segments, on ne peut en trouver trois qui aient même longueur et une extrémité commune, ni trois ayant même longueur et formant triangle (sinon on serait aussitôt ramené au cas précédent).

Prenons les trois segments de longueur  $p$  : leurs six extrémités ne peuvent être toutes distinctes, donc deux d'entre eux ont une extrémité commune ; en renommant les points, on peut toujours dire que ces deux segments sont  $[AB]$  et  $[BC]$  ; une des extrémités du troisième segment est donc forcément A ou C (ce ne peut être B, car les trois segments seraient issus d'un même point, ce que nous avons exclu). En changeant éventuellement à nouveau les notations, on peut supposer que  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  forment une ligne polygonale non fermée dont les trois segments ont même longueur ; observons qu'alors il en est de même pour  $[BD]$ ,  $[DA]$ ,  $[AC]$ .

Conservons ces notations et supposons, ce qui n'est pas restrictif vu la symétrie des données, que l'on a  $p < q$ .

Si A et D sont de part et d'autre de la droite (BC), de  $BD = AC$  et  $AB = CD$  résulte que  $ABDC$  est un parallélogramme. Or, dans un parallélogramme, au moins une diagonale est plus longue que le plus grand des côtés, ce qui donne ici  $AD > q$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.



N.B. : La propriété que nous venons d'utiliser résulte de deux faits :

- tout parallélogramme a au moins un angle obtus ou droit ;
- dans tout triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté.

Il nous reste donc à examiner le cas où les deux points A et D sont du même côté de la droite (BC) ; comme les deux triangles  $BCA$  et  $CBD$  sont isométriques, les points A et D sont à égale distance de (BC). Les droites (AD) et (BC) sont donc parallèles et  $ABCD$  est un trapèze isocèle.

Si bien que nous sommes amenés au problème suivant :

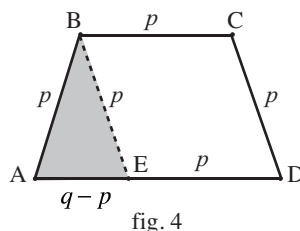
**Trouver un trapèze isocèle dans lequel**

- la plus petite des deux bases a même longueur  $p$  que chacun des côtés obliques ;
- la grande base a même longueur  $q$  que chacune des diagonales.

L'étude se décompose en deux étapes :

**Étape 1 :** Étant donné deux longueurs  $p$  et  $q$  ( $p < q$ ), existe-t-il un trapèze ABCD dont les bases vérifient  $BC = p$  et  $AD = q$  et dont les côtés obliques vérifient  $AB = CD = p$  ?

Prouvons son existence en le construisant. Il suffit de construire un triangle ABE vérifiant  $AB = BE = p$ ,  $AE = q - p$ , ce qui est faisable si et seulement si on a  $q < 3p$ , et de compléter ensuite par un losange ad hoc (voir figure 4).



N.B. : La même méthode permet (c'est un bon exercice) de construire un trapèze dont les côtés ont des longueurs données : on construit d'abord un triangle avec les longueurs des côtés obliques et la différence des longueurs des bases, puis on complète par un parallélogramme.

**Étape 2 :** À quelle condition le trapèze ainsi construit est-il solution ?

Nous répondrons à cette question de deux façons dont chacune a son intérêt : par des calculs de longueurs, par des calculs d'angles.

*Première solution :* Le trapèze de l'étape 1 étant construit pour  $p$  et  $q$  imposés ( $p < q < 3p$ ), il nous suffit de voir quelle relation doivent vérifier  $p$  et  $q$  pour que  $BD = q$ .

Calculons d'abord BD.

H et K étant les projections orthogonales de B et C sur (AD), on a :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

et

$$BD^2 = DH^2 + HB^2.$$

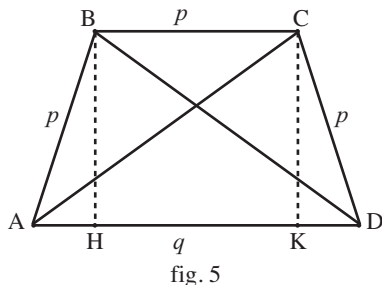
D'où

$$BD^2 - p^2 = DH^2 - AH^2,$$

soit

$$BD^2 - p^2 = (DH + AH)(DH - AH).$$

Compte tenu de la symétrie de la figure, on a  $AH = DK$ , donc  $DH - AH = HK = p$ . Nous obtenons finalement<sup>(1)</sup>  $BD^2 - p^2 = pq$ .



(1) Ce résultat s'obtient plus vite si l'on dispose du théorème sur la différence des carrés de deux côtés d'un triangle. Ce théorème est une application immédiate du produit scalaire... mais ce dernier n'apparaît maintenant qu'en première S.

La condition nécessaire et suffisante  $BD = q$  s'écrit donc :

$$q^2 - pq - p^2 = 0.$$

Posons  $\frac{q}{p} = x$ . Nous obtenons l'équation  $x^2 - x - 1 = 0$ , soit

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Comme on veut  $q > p$ , la seule solution est  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (nombre d'or), c'est-à-dire

$q = p \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ . Il est immédiat que cette valeur est bien comprise entre  $p$  et  $3p$ .

**Remarque :** On peut pousser un soupir de soulagement et penser que la question est complètement réglée. C'est vrai en un sens mais, on va le voir, nous sommes passés à côté de ce qui est (après coup) une évidence géométrique.

*Seconde solution :* Reprenons le point de départ de la solution précédente : un trapèze ABCD de bases [AD] et [BC] dont les côtés ont pour longueurs  $p, p, p, q$  avec les notations de la figure 5. Nous partons là encore de la condition nécessaire et suffisante  $BD = q$ , mais cette fois-ci nous allons raisonner sur les angles de la figure.

Les angles  $\widehat{ADB}$  et  $\widehat{DBC}$  sont égaux comme alternes-internes ; appelons  $\theta$  leur valeur commune. Le triangle BCD étant isocèle ( $BC = CD = p$ ), on a aussi  $\widehat{BCD} = \theta$ , donc  $\widehat{ADC} = 2\theta$  et par symétrie  $\widehat{DAB} = 2\theta$ . Le triangle ABD étant isocèle de sommet D, on obtient  $\widehat{ABD} = 2\theta$ , puis, en faisant la somme des angles de ce triangle ABD :

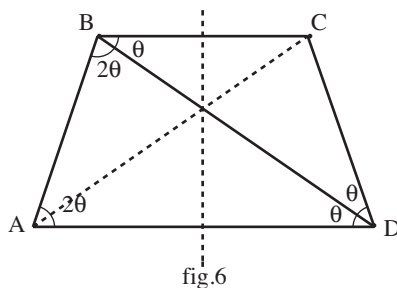
$$2\theta + 2\theta + \theta = \pi,$$

c'est-à dire  $\theta = \frac{\pi}{5}$ .

En utilisant le triangle isocèle BCD et sa hauteur issue de C, on voit que  $\cos\theta = \frac{BD}{2p}$ .

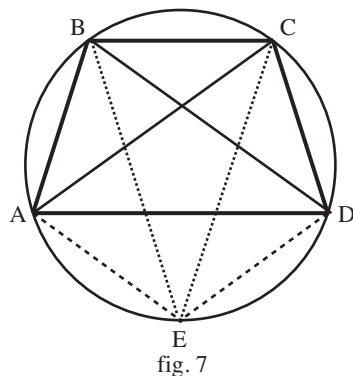
Il s'ensuit que  $BD = q$  équivaut à  $q = 2p \cos \frac{\pi}{5}$ .

N.B. : Avec une classe de collègue, il faut naturellement raisonner en degrés ; les radians ont été utilisés ici parce que  $\frac{\pi}{5}$  est nettement plus évocateur que  $36^\circ$ ... et aussi prépare le paragraphe qui suit.



*Commentaire*

Nous avons donc pour  $p$  fixé, à une isométrie près, une solution unique, telle que les angles en B et C de la ligne polygonale ABCD soient égaux à  $\frac{3\pi}{5}$ , les points A et D étant du même côté de (BC). Autrement dit, cette ligne polygonale forme trois côtés consécutifs d'un pentagone régulier ;  $p$  est la longueur des côtés de ce pentagone,  $q$  celle des côtés du pentagone étoilé associé.



Évident, bien sûr, mais *a posteriori* !

En rassemblant les résultats obtenus précédemment, nous avons résolu le problème que voici :

***Trouver tous les ensembles de quatre points du plan dont chacune des six distances mutuelles soit égale à l'une de deux valeurs  $p$  ou  $q$ .***

La figure 8 ci-après récapitule les différents cas possibles (en trait continu les segments de longueur  $p$ , en trait interrompu les segments de longueur  $q$ ).

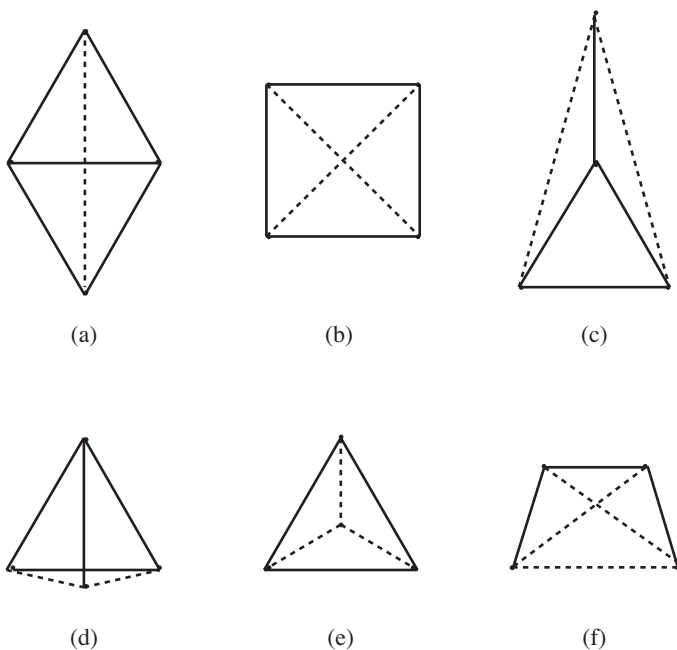


fig. 8

## Le problème à $n$ points

Il est tentant, parvenu à ce stade, de généraliser le problème : trouver tous les ensembles de  $n$  points ( $n > 4$ ) dont les distances mutuelles ne peuvent prendre que la valeur  $p$  ou la valeur  $q$ . L'étude est trop complexe pour être traitée avec une classe (elle suppose en outre connu tout ce qui précède), mais reste élémentaire et assez instructive, d'autant plus que deux morceaux (ceux qu'illustrent les figures 10 et 11) peuvent être étudiés isolément et constituer en quatrième ou troisième de bons thèmes de travail.

### Étude du cas $n = 5$

Supposons que nous ayons cinq points A, B, C, D, E dont les distances deux à deux ne puissent prendre que la valeur  $p$  ou la valeur  $q$ . Tout sous-ensemble de quatre points a la même propriété et a donc l'un des six aspects représentés par la figure 8.

**Étudiions d'abord les situations où A, B, C forment un triangle équilatéral de côté  $p$ .**

Chacun des ensembles A, B, C, D et A, B, C, E a donc l'un des aspects (a), (c), (d) ou (e) de la figure 8. Le cas (a) correspond à  $q = p\sqrt{3}$ , le cas (c) à  $q = p\sqrt{2+\sqrt{3}}$ , le cas (d) à  $q = p\sqrt{2-\sqrt{3}}$  et le cas (e) à  $q = p/\sqrt{3}$ .

Ces quatre valeurs de  $q$  sont différentes (regarder leurs carrés ... ou taper sur la calculatrice).

A, B, C, D et A, B, C, E appartiennent donc au même type (a), (c), (d) ou (e).

**Le cas (e)** se règle aussitôt : D et E devraient être tous les deux au centre du triangle ABC, donc cette situation est à exclure.

Voyons **le cas (a)** : en permutant éventuellement les lettres A, B, C, il aboutit à la figure 9, sur laquelle on voit que  $DE = 2p$ , ce qui ne convient pas.

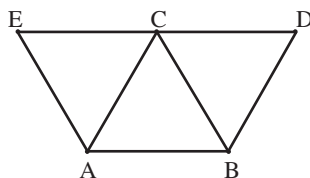


fig. 9

**Le cas (c)** aboutit (en permutant s'il le faut les lettres A, B, C) à la figure 10. On voit aussitôt sur cette figure que  $DE > DB$ . À l'intention du lecteur pointilleux, signalons qu'il suffit de prouver que l'angle  $\widehat{DBE}$  est obtus. C'est en soi un agréable exercice que de le calculer :

$$\widehat{DAB} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

$$\text{donc } \widehat{ABD} = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ,$$

$$\text{d'où } \widehat{DBE} = \widehat{ABE} - \widehat{ABD} = 150^\circ - 15^\circ$$

$$\text{et finalement } \widehat{DBE} = 135^\circ.$$

La distance DE n'est donc égale ni à  $p$  ni à  $q$ .

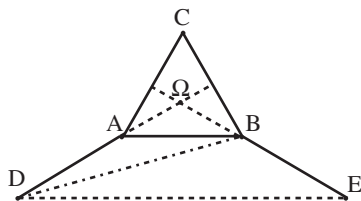


fig. 10

On peut d'ailleurs s'offrir de la calculer directement en appliquant le théorème de Thalès aux triangles  $D\Omega E$  et  $A\Omega B$ , où  $\Omega$  est le centre du triangle  $ABC$  :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{\Omega D}{\Omega A} = \frac{1+1/\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}}, \text{ donc } DE = p(\sqrt{3}+1).$$

**Le cas (d)** nous amène à la figure 11. Si le lecteur est aussi dépourvu de scrupules que l'auteur, il verra aussitôt sur la figure que la distance  $DE$  n'est égale ni à  $p$  (distance  $AB$ ) ni à  $q$  (distance  $BD$ ) et considèrera l'affaire comme terminée : le cas (d) ne nous donne pas de solution.

À l'intention des âmes vertueuses, donnons deux preuves calculatoires.

*Par les angles* : de  $\widehat{DAB} = 30^\circ$  on tire, puisque  $ADB$  est isocèle,  $\widehat{ABD} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ . Il en résulte que  $\widehat{BDC} = 15^\circ$  ; donc  $\widehat{EBD} = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$ . La symétrie de la figure fait que  $(DE) \parallel (AB)$ , donc que  $\widehat{DEB} = \widehat{EBA} = 30^\circ$ .

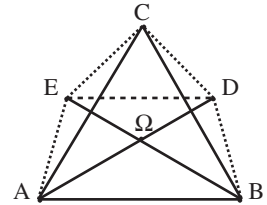


fig. 11

Les trois angles du triangle  $EBD$  valent donc  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  et  $180^\circ - 45^\circ - 30^\circ$ , soit  $105^\circ$  ; ils sont donc inégaux, donc aussi les trois côtés, ce qui prouve que  $DE$  ne vaut ni  $p$  ni  $q$ . Le cas (d) ne donne donc pas non plus de solution.

*Par les longueurs* : comme dans le cas précédent, le calcul explicite de  $DE$  est aisé. En appliquant le théorème de Thalès aux triangles  $D\Omega E$  et  $D\Omega B$ , on trouve cette fois  $DE = p(\sqrt{3}-1)$ .

Nous avons donc au total prouvé que, si trois des points forment un triangle équilatéral, les cinq points  $A, B, C, D, E$  ne peuvent pas constituer une solution.

Si donc il existe une solution, tout système de quatre points qui en est extrait se situe dans le cas (b) ou le cas (f).

Supposons que  $ABCD$  soit un carré.  $ABCE$  ne peut être dans le cas (f), car la configuration (f) n'inclut aucun triangle rectangle isocèle, donc c'est un carré et  $E$  est confondu avec  $D$ , ce qui est exclu.

La seule possibilité qui nous reste est donc que  $A, B, C, D$  et  $A, B, C, E$  soient disposés selon la configuration (f) ; or celle-ci est formé de quatre sommets d'un pentagone régulier.

**La seule solution au problème dans le cas de cinq points est donc celle que représente la figure 7 : les cinq points sont les sommets d'un pentagone régulier.**

### Étude pour $n > 5$

Supposons que nous ayons une solution  $A, B, C, D, E, F, \dots$ . Les points  $A, B, C, D, E$  forment une solution du problème à cinq points, donc sont (pas forcément dans



l'ordre) les sommets d'un pentagone régulier. Mais il en est de même pour les cinq points A, B, C, D, F, donc E et F sont confondus, ce qui est contraire à l'hypothèse. Pour  $n > 5$ , le problème n'a pas de solution.

## Appendice : le problème dans l'espace

Le problème à quatre points que nous avons traité dans le plan a évidemment son pendant dans l'espace :

*Trouver tous les ensembles de cinq points de l'espace dont chacune des distances mutuelles soit égale à l'une de deux valeurs  $p$  ou  $q$ .*

L'étude complète est longue et délicate, et nous ne l'aborderons pas. Mais il est possible, en s'inspirant de ce qui a été fait dans le plan, de trouver des solutions.

En particulier, puisque plusieurs solutions du problème plan s'obtiennent en complétant par un quatrième point les sommets d'un triangle équilatéral, on peut s'attaquer au travail suivant :

**Étant donné un tétraèdre régulier ABCD d'arête  $p$ , trouver un point E tel que chacune des distances AE, BE, CE, DE soit égale à  $p$  ou à une autre valeur donnée  $q$ .**

Cela donne un lot d'exercices sur les distances dans l'espace qui n'est pas dépourvu d'intérêt.

### 1. Quelques longueurs associées au tétraèdre régulier

Soit O le centre du tétraèdre (O est à la fois le centre de la sphère circonscrite et l'isobarycentre des sommets), G le centre de gravité du triangle ABC, M le milieu de [AD] et P le milieu de [BC].

On a

$$AG = \frac{2}{3}AP = \frac{2}{3}p \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}p,$$

puis

$$DG^2 = AD^2 - AG^2 = p^2 - \frac{p^2}{3} = \frac{2}{3}p^2.$$

Et, puisque O est barycentre de (D,1) et (G,3), il vient

$$OG = \frac{1}{2\sqrt{6}}p$$

et le rayon de la sphère circonscrite est :

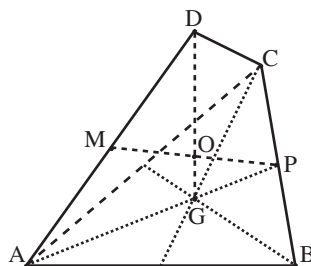


fig. 12

$$R = OD = 3OG = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} p.$$

Calculons la distance  $h$  de  $O$  au milieu d'une des arêtes. Dans le triangle rectangle  $OGP$ , on a

$$h^2 = OP^2 = OG^2 + GP^2 = \frac{1}{24} p^2 + \frac{1}{12} p^2 = \frac{1}{8} p^2,$$

donc

$$h = \frac{1}{2\sqrt{2}} p.$$

**2. Trouver E tel que trois au moins de ses distances aux sommets du tétraèdre soient égales à  $p$ .**

On peut toujours supposer que l'on impose  $AE = BE = CE = p$ . Le tétraèdre  $ABCE$  est alors régulier, donc  $D$  et  $E$  sont symétriques par rapport au plan  $(ABC)$  et la longueur  $DE$  vaut  $2 DG$ . Dans cette configuration, neuf des distances mutuelles des cinq points valent  $p$  et la dixième  $q = 2\sqrt{\frac{2}{3}} p$ .

N.B. : La figure ainsi obtenue, formée de deux tétraèdres réguliers de même taille collés par une face, est souvent dite « diamant ». C'est l'exemple le plus simple de polyèdre non régulier dont toutes les faces sont des polygones réguliers isométriques.

**3. Trouver E tel que deux exactement des distances de E aux sommets du tétraèdre soient égales à  $p$ , les deux autres étant égales entre elles.**

On peut toujours supposer que l'on impose  $AE = DE = p$  et  $BE = CE = q$ ,  $q$  étant à déterminer.

Le point  $E$  doit donc être situé à la fois dans le plan médiateur de  $AD$  et dans celui de  $BC$ . En appelant encore  $M$  le milieu de  $[AD]$  et  $P$  le milieu de  $[BC]$ , l'intersection de ces deux plans est la droite  $(MP)$  de la figure 13 (on vérifie en effet immédiatement que  $M$  et  $P$  appartiennent à ces deux plans).

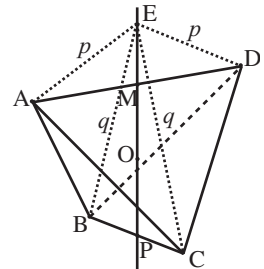


fig. 13

Un point  $E$  de cette droite répond à la question si et seulement si il est à la distance  $p$  de  $A$ . Or le triangle  $EMA$  est rectangle en  $M$ , d'où  $EM^2 = EA^2 - AM^2$ , c'est-à-dire  $EM^2 = p^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ , soit  $EM = p\frac{\sqrt{3}}{2}$ , ce qui donne pour  $E$  deux positions symétriques par rapport à  $M$ . On calcule alors sans difficulté la distance  $CE = q$ .

N.B. : en échangeant les rôles de  $[AB]$  et  $[CD]$ , on trouve sur la droite  $(MP)$  deux autres points solutions, symétriques l'un de l'autre par rapport à  $P$  et symétriques des deux précédents par rapport au centre  $O$  du tétraèdre.

**4. Trouver E tel qu'une seule des distances de E aux sommets du tétraèdre soit égale à  $p$ , les trois autres étant égales entre elles.**

On peut toujours supposer que l'on impose  $DE = p$  et donc aussi  $AE = BE = CE = q$ . Le point E doit donc être situé sur l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC, autrement dit la droite (OG).

On doit donc porter sur cet axe, à partir de D, la longueur  $p$ , ce qui donne deux positions possibles, dont une seule a été représentée sur la figure 14. Le calcul de  $q$  résulte alors du théorème de Pythagore appliqué au triangle AGE.

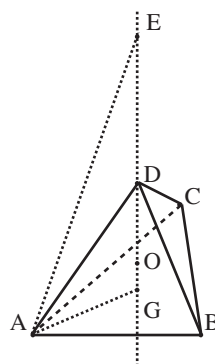


fig. 14

**5. Trouver E tel que les quatre distances de E aux sommets du tétraèdre soient égales à une valeur  $q$  différente de  $q$ .**

La seule solution possible est évidemment de mettre le point E en O ; la valeur  $q$  est alors le rayon R de la sphère circonscrite au tétraèdre, dont nous avons montré plus

haut qu'il vaut  $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}p$ .

### Un dernier exercice

Nous laissons au lecteur (ou à ses élèves) le soin de résoudre l'exercice suivant :

On donne sur un parallélépipède rectangle (autre qu'un cube) quatre points A, B, C, D tels que [AB] et [CD] soient des diagonales non parallèles de deux faces opposées. Si E est le centre de ce parallélépipède, comment choisir les longueurs  $x, y, z$  des arêtes pour que les cinq points A, B, C, D, E soient une solution du problème ?

Réponse : aux permutations de notations près, on trouve :

$$y = x, z = x\sqrt{6}, \text{ avec } p = x\sqrt{2}, q = x\sqrt{7}.$$

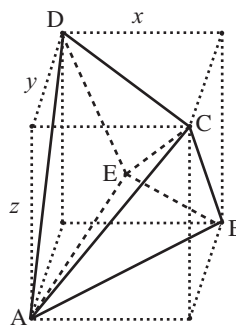


fig. 15

### Bibliographie

[1] Yaglom & Yaglom : *Challenging Mathematical Problems With Elementary Solutions*, vol. 2, éd. Holden-Day : traduction d'un original russe de 1954, régulièrement rééditée (prix très abordable). Nombreux thèmes intéressants au niveau post-bac, peu d'exercices utilisables avant.

[2] Brochure APMEP n° 158 : *Les Olympiades académiques de Mathématiques 2003*, pages 24 à 35.