

# Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ?<sup>(\*)</sup>

Les mathématiques en marche au long  
de la scolarité obligatoire

L'exemple de la symétrie axiale

Marie-Jeanne Perrin-Glorian<sup>(\*\*)</sup>

Ce texte reprend les grandes lignes de la deuxième partie d'une conférence donnée lors des journées de l'APMEP à Grenoble. L'essentiel de ce qui constituait la première partie de cette conférence devrait paraître dans un prochain numéro de Repères-IREM. La deuxième partie est un essai de mise en œuvre des réflexions de la première partie dans le cas de la symétrie axiale qui me conduit à proposer quelques jalons pour une progression du cours préparatoire au collège. Ces propositions sont le fruit de la réflexion d'un groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire soutenu pendant plusieurs années par l'IUFM Nord-Pas-de-Calais. Elles sont entièrement soumises à la discussion et j'espère qu'elles susciteront des réactions de collègues. Un texte un peu plus complet, comprenant une réflexion sur l'évolution de la notion de figure et des instruments du cours préparatoire au collège et donnant quelques éléments sur ce que nous appelons restauration de figure, doit paraître sur le site de l'APMEP.

## Introduction

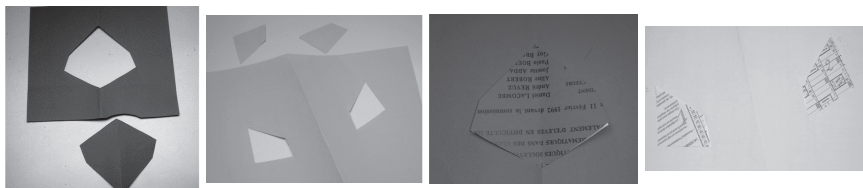
Il y a une rupture nécessaire dans le rapport aux figures quand on les envisage du point de vue de la démonstration. Beaucoup de travaux l'ont décrite ainsi que les difficultés et malentendus qu'elle entraîne pour les enseignants et les élèves au début du collège, le plus souvent en se plaçant du point de vue de la géométrie théorique que l'on vise. Notre propos est différent car notre regard se porte plutôt dans l'autre direction : comment peut-on faire émerger les concepts de la géométrie euclidienne et le langage géométrique à partir d'actions matérielles sur des objets matériels, ce qui est le seul type d'activité de nature géométrique qu'on peut envisager au cours préparatoire ? Cette interrogation nous amène à reconsidérer la notion de figure elle-même, son évolution au cours de la scolarité obligatoire, ainsi que la place et le rôle des instruments et des objets matériels avec lesquels on agit, la nature de ces actions, la place accordée aux grandeurs et mesures, leur rôle dans une progression. Nous allons essayer de l'illustrer sur l'exemple de la symétrie axiale.

(\*) Conférence lors des journées de Grenoble, 24 octobre 2011

(\*\*) Professeure émérite à l'université d'Artois, et rattachée au Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris-Diderot, marie-jeanne.perrin@univ-paris-diderot.fr

## Des jalons pour une progression

Nous tenterons de penser la continuité de l'enseignement de la symétrie orthogonale du CP à la fin du collège en lien avec les apprentissages selon deux dimensions : d'une part les actions et les types d'objets (matériels ou non) sur lesquels elles s'exercent, en lien avec les concepts géométriques gouvernant la symétrie ; d'autre part les deux aspects de la symétrie axiale, soit comme propriété d'une figure soit comme transformation d'une figure en une autre. Illustrons la deuxième dimension à l'aide d'une petite expérience, réalisée dans du papier de couleur biface<sup>(1)</sup> (papier de brouillon en l'occurrence) : on plie une feuille et on découpe un polygone à travers les deux épaisseurs. Si on coupe le pli, on a un morceau (feuille noire) ; si on ne le coupe pas, on a deux morceaux (feuille grise). Le morceau noir a la propriété de rentrer dans son empreinte à l'endroit et à l'envers. Chaque morceau gris rentre dans une seule empreinte à l'endroit<sup>(2)</sup> ; il rentre dans l'autre empreinte à l'envers. Le morceau 2 se superpose avec le morceau 1 après retournement : chacun est le retourné de l'autre ; les encoches laissées dans la feuille grise délimitent des figures symétriques l'une de l'autre par rapport à la pliure mais les morceaux ne le sont pas ; ils ne le deviennent que si on les positionne convenablement.



Ajoutons que les manipulations matérielles se font dans l'espace, même si elles portent sur des objets plats et que, suivant la manipulation, la symétrie axiale est vue comme la trace dans le plan d'une symétrie par rapport à un plan, transformation négative de l'espace (miroir), ou d'une rotation autour d'un axe, transformation positive de l'espace (pliage). Dans le pliage, on fait coïncider les objets face contre face et, à travers le calque ou par le découpage, on voit le verso de l'une qui coïncide avec le recto de l'autre. La (demi-)figure qui est de l'autre côté de l'axe sur le même côté de la feuille, c'est celle qui est au verso de la feuille du même côté de l'axe. Dans le retournement d'un calque sans plier, on a explicitement le verso de la figure. Il faut prendre des repères pour reposer le calque, même si on a dessiné l'axe sinon on risque d'avoir une symétrie glissée. Le pliage, lui, fixe la manière de reposer le calque. Cependant, pour considérer que la transformation se passe dans un plan, il faut ramener la figure sur le bon côté de la feuille, ce qui revient à identifier des deux faces de la feuille de papier.

Sur la *dimension* « objets et actions sur ces objets », nous envisageons une progression en quatre à cinq degrés :

1. Objets qu'on déplace ;

(1) On peut en différencier les faces.

(2) Sauf, si on avait découpé un polygone régulier, ce qui est hautement improbable en découpant au hasard.

2. Tracés avec calque ou pliage (instruments qui gardent la forme et actions dans l'espace) ;
3. Tracés sans sortir du plan de la feuille, soit avec quadrillage (3a, vision contour) soit avec les instruments classiques (3b), ce qui demande une déconstruction dimensionnelle en droites (ou segments), cercles et points ; enfin,
4. Travail sur des objets géométriques théoriques.

Sur la *dimension* « *propriété / transformation d'une figure* », nous envisageons aussi cinq degrés :

1. Figure symétrique (axe non nécessairement identifié) en entendant figure au sens de tracé matériel, voire au sens d'objet ;
2. Axe de symétrie d'une figure (objet matériel, pliage) ;
3. Symétrie d'une figure par rapport à un axe (aspect transformation) ;
4. Points invariants, passage à une vision ponctuelle de la figure et de la transformation ;
5. Axe de symétrie d'une figure (figure globalement invariante).

Pour décrire cette progression, nous prenons aussi en compte deux variables : d'une part les types de tâches liés à la symétrie plane, c'est-à-dire vérifier, restaurer ou produire une symétrie et d'autre part le statut de l'axe, en particulier sa présence ou non (axe non nécessairement identifié, axe donné, axe à déterminer). On pourra ainsi reconnaître (vérifier) si une figure tracée est symétrique ou non, axe non identifié, donné ou à déterminer ; reconnaître si deux figures sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un axe donné ; produire une figure symétrique ou compléter une figure pour qu'elle soit symétrique (axe donné ou non, à déterminer ou non) ; produire la figure symétrique d'une figure par rapport à un axe donné, compléter une figure pour qu'elle soit la symétrique d'une figure par rapport à un axe donné ou à déterminer. En revanche, nous ne considérons ni le langage (qui évolue au cours de la progression) ni l'organisation de la classe. Nous allons maintenant essayer de caractériser quelques étapes dans cette progression, étant entendu que ces étapes ne sont ni complètement disjointes ni complètement ordonnées.

### **Étape 1 : La symétrie comme propriété d'un objet plus ou moins aplati de l'espace (maternelle)**

Cette étape se situe en maternelle et s'accompagne de l'identification d'objets plats parmi les solides de l'espace. Il s'agira, dans des activités d'encastrement (type boîte aux lettres ou puzzle à une pièce) de *reconnaître* (sans nécessairement la formuler) une symétrie sur des objets particuliers de l'espace (ce sont des prismes droits plus ou moins aplatis) et des actions sur ces objets : certaines pièces rentrent à l'endroit et à l'envers dans leur encoche. La différenciation matérielle des deux faces est une variable qui permet de prendre conscience du phénomène et de l'exprimer : nous appellerons *bifaces* les objets plats (par exemple en papier ou carton) dont on peut différencier les faces, ce qui permet de garder une trace de l'espace<sup>(3)</sup>.

---

(3) Les figures planes n'ont pas d'épaisseur, elles n'ont qu'une face ; différencier les faces revient à considérer qu'elles ont une épaisseur.

Dès cette étape, on pourra aussi *produire* de la symétrie sur des objets en papier par pliage et découpage (fabrication de napperons et autres ribambelles) ou avec de la peinture par pliage et impression.

On voit ainsi, dès cette étape apparaître deux conceptions de la symétrie :

- le retournement : le recto et le verso sont « pareils »
- le pliage : on a deux moitiés qu'on peut superposer (faire coïncider).

Dans la première, l'espace est assumé (les objets bifaces « symétriques » l'un de l'autre sont différents) et l'axe n'apparaît pas ; dans la seconde l'espace n'apparaît qu'à travers le mouvement de pliage et l'axe est matérialisé par la ligne de pliage.

## Étape 2 : Reconnaître, compléter, produire une figure symétrique tracée sur papier uni, par pliage ou retournement avec calque

Cette étape se situe en fin de cycle 2 (CE1) ou début de cycle 3 (CE2). On peut envisager plusieurs types de tâches :

– *Vérifier qu'une figure dessinée sur papier est symétrique* (exemple : tri de figures suivant qu'elles sont symétriques ou non). Si les figures sont dessinées sur du papier assez transparent, on peut plier sans découper. Si elles sont tracées sur papier opaque, on doit découper pour vérifier par pliage (pour une figure « simple », les tracés sont limités au contour). Si on dispose de calque, on peut repasser toute la figure (ou une demi-figure) et retourner le calque. Des questions se posent sur la manière de procéder, qui sont en lien étroit avec le concept de symétrie axiale : Comment plier ? Selon l'axe sur lequel on fait d'abord une hypothèse, éventuellement implicite ? Mais c'est difficile de plier précisément selon une droite à cet âge. En faisant coïncider des points dont on pense qu'ils se correspondent en lissant la feuille ensuite pour faire apparaître l'axe ? Si on essaie de faire coïncider des segments de même longueur, on ne peut pas forcément terminer le pli (par exemple pour un parallélogramme)... Avec un calque sans plier, que décalque-t-on (la figure entière ou une moitié en faisant une hypothèse sur l'axe) ? Comment reposer le calque ? Il faut avoir repéré, au moins implicitement, des points invariants ou des points qui se correspondent.

– *Compléter ou produire une figure symétrique*. Dans ce cas, il faut non seulement voir mais tracer sur la même face du papier. Avec un miroir, on voit même si l'image est déformée ; avec un géomiroir il y a possibilité de voir l'image sur le papier et de tracer mais on ne peut que constater. Par pliage, sur du papier assez transparent, on peut soit plier vers l'extérieur mais il faut voir à travers une double épaisseur de papier, soit plier vers l'intérieur mais il faut repasser deux fois. Par retournement d'un calque, se pose la question de savoir comment reposer le calque.

Exemples : compléter le sapin pour qu'il soit symétrique, compléter la balle de tennis pour obtenir une figure symétrique.

L'axe est présent au moins implicitement dans le pliage. Dans le retournement d'un calque, il peut ne pas apparaître. Il y a d'ailleurs une infinité de possibilités pour compléter la figure.

Dans le cas du sapin, le modèle culturel restreint les possibilités ; dans le cas de la



Figure 1

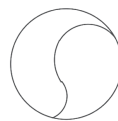


Figure 2

balle de tennis, on peut penser que la plupart des élèves vont conserver le cercle, n'importe quelle position du calque donne alors une figure symétrique. Si on ne conserve pas le cercle, il suffit de conserver un point d'intersection de l'arc et du cercle pour obtenir une figure symétrique. Les élèves qui décalquent un demi-sapin gardent souvent la base du tronc entier faute de savoir où s'arrêter et cela leur fournit un moyen de reposer correctement le calque.

On peut, dès cette étape, dire pourquoi une figure est symétrique mais aussi pourquoi une figure n'est pas symétrique (plus difficile mais essentiel), au moins pour certaines figures (polygones par exemple) pour lesquelles on peut épuiser toutes les possibilités de coïncidence des côtés.

### Étape 3 : Émergence de l'axe de symétrie et prise en compte de l'aspect transformation (cycle 3)

Quand on a produit une figure symétrique en retournant un calque sans le plier, par exemple pour la balle de tennis, se pose la question de trouver l'axe de symétrie ou encore de prouver que la figure est symétrique par pliage (moyen de vérification).

Autre exemple : Certains papillons ne sont pas symétriques. Lesquels ? Pourquoi ?

Une droite s'impose comme candidate pour l'axe. Dans le cas où il n'y a pas symétrie, on peut argumenter en s'appuyant sur le fait qu'on ne peut faire coïncider que des segments de même longueur. Les triangles peuvent être isométriques ou non.

Dans ce cas comme pour la balle de tennis ou la variante triangle équilatéral (figure 3), des points d'intersection appartiennent à l'axe, d'autres non.

On peut aussi, dès cette étape considérer l'aspect transformation et produire la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe donné avec un calque ou un gabarit, c'est-à-dire faire des tracés (à la règle ou à main levée) en utilisant des instruments qui gardent la forme de la figure. On rencontre le problème du positionnement du calque ou du gabarit : il faut plier sans bouger le calque ou il faut décalquer l'axe et prendre un repère sur l'axe.

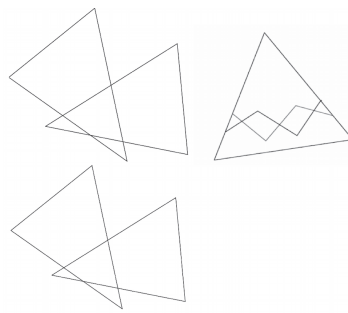
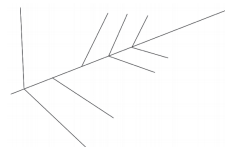


Figure 3

### Étape 4 : Vérifier ou produire une symétrie sans sortir du plan de la feuille (CM-Sixième)

Comment se passer du pliage et du calque ? Comment ne pas sortir du plan de la feuille ? Ne pas sortir du plan peut se faire *sur papier uni avec les instruments usuels*. Cela demande une déconstruction dimensionnelle des figures symétriques pour utiliser (et si possible expliciter) des relations entre des éléments de dimension 1 ou 0 (lignes et points). Les élèves de fin de cycle 3 ou de Sixième n'y recourent pas spontanément. Par exemple dans la restauration du sapin (figure 1), des élèves de Sixième reproduisent en fait des triangles au compas. On peut les encourager à s'appuyer sur les lignes pour ensuite faire apparaître les relations entre points en

jouant sur les variables de la restauration de figures symétriques, notamment le coût des instruments, par exemple, pour le sapin, on peut prendre le barème : règle (non graduée) gratuite pour tracer une nouvelle droite, 1 point pour prolonger un segment existant ; report de longueur ou compas, 5 points, équerre 5 points, calque 200 points. On aura alors intérêt à tracer l'axe et à utiliser les intersections des droites avec l'axe. Le choix d'une amorce qui empiète des deux côtés de l'axe (plume ci-contre, sapin de la figure 1) peut inciter les élèves à utiliser le fait que des droites symétriques se coupent sur l'axe de symétrie. On peut ne pas donner l'axe mais faire en sorte que son tracé permette d'abaisser le coût de la construction (sapin).

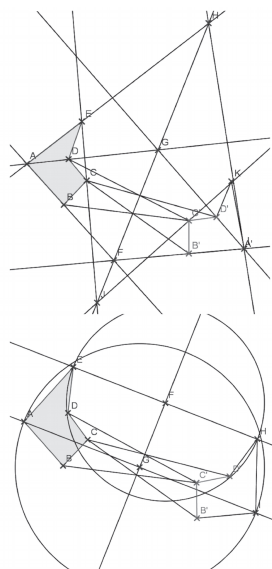


La restauration permet de faire apparaître des lignes intéressantes, des longueurs égales ou à conserver. Des propriétés émergentes sont ainsi utilisées pour anticiper la symétrie de la figure et peuvent être progressivement formulées.

### Étape 5 : Transformation par symétrie sans sortir du plan (CM2-6ème)

Comment produire la figure symétrique d'une figure par rapport à un axe donné si l'on ne voit pas la figure comme définie par un ensemble de points ?

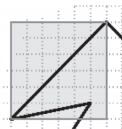
On peut, comme à l'étape précédente utiliser la restauration de figure pour s'appuyer sur les procédures disponibles des élèves puisque produire la figure symétrique d'une figure revient à restaurer une figure symétrique non connexe. L'axe peut être donné ou à déterminer à partir d'une partie de l'image. Par exemple, pour le polygone ci-contre où la ligne brisée A'B'C' est donnée, avec le barème 1 (joindre deux points ou tracer une nouvelle droite : gratuit, prolonger un segment : 1 point, équerre ou compas : 5 points) la première restauration coûte 2 points et la seconde 20 points alors qu'avec le barème 2 (joindre deux points ou tracer une nouvelle droite : gratuit, prolonger un segment : 10 points, équerre gratuite, compas : 5 points), la première restauration coûte 20 points et la seconde 10 points. Utiliser (AD) et (CE) permettrait de réduire le coût dans la deuxième restauration. Compléter le quadrilatère en le triangulant demanderait 4 coups de compas.



On peut alors en 6ème s'appuyer sur la vision des figures comme réseau de points et lignes pour expliciter l'image des figures usuelles, point, segment, droite, cercles, les caractériser à partir des points et voir comment on peut les utiliser pour produire l'image par symétrie de la plupart des figures géométriques. On peut aussi faire apparaître des points sur des lignes.

## Reconnaître, restaurer, produire une figure symétrique sur quadrillage

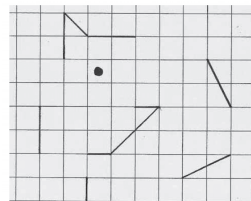
Parallèlement à la progression, aux étapes 2, 3, 4, 5 nous faisons une place à part au quadrillage car les procédures sur quadrillage relèvent d'une vision différente. Ainsi, la figure simple est plutôt vue sur quadrillage comme un contour et, quand l'axe est porté par les lignes du quadrillage, le tracé d'un segment est vu comme un déplacement sur le quadrillage d'une extrémité à l'autre, un segment oblique est ainsi défini par le composé d'un déplacement horizontal et vertical ou comme diagonale d'un rectangle ou hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont portés par le quadrillage.



Pour produire le symétrique d'un segment oblique par rapport à un axe vertical, on inverse le déplacement horizontal en gardant le déplacement vertical (*mutatis mutandis* pour un axe horizontal) ou on change l'orientation de la diagonale du rectangle ou de l'hypoténuse du triangle. L'orthogonalité est prise en charge par le quadrillage et la distance à l'axe gérée par un comptage de carreaux.

*Exemple réalisé en CE2 : le chat.*

La figure amorce traverse l'axe de symétrie et présente la moitié de la figure complétée. Cependant, si l'axe n'est pas fourni, il est nécessaire de donner plus que la moitié pour disposer d'éléments qui se correspondent sinon on pourrait choisir n'importe quel axe. Ici, le dessin étant figuratif, les élèves se sont mis d'accord sur la position de la deuxième oreille.



La seule difficulté consiste à compléter le nez, le reste peut se faire en joignant les points pour fermer la figure en respectant le décrochement de l'oreille.

Si l'axe est porté par les diagonales du quadrillage, il y a échange des horizontales et verticales ; pour les segments obliques, il devient plus difficile de les voir comme un déplacement sur quadrillage. Si l'axe est une autre oblique (déterminé par une pente ou deux nœuds du quadrillage), une vision ponctuelle est nécessaire ainsi que la notion de vecteurs orthogonaux ou on fait abstraction du quadrillage qui devient une gêne plutôt qu'une aide. Ainsi le travail sur quadrillage demande d'autres procédures qui réfèrent plutôt à la géométrie analytique.

## Étape 6 : Figure symétrique comme globalement invariante (Sixième)

On peut alors en Sixième reprendre la notion de figure symétrique d'un nouveau point de vue : Une figure symétrique par rapport à un axe est sa propre image dans la symétrie par rapport à cet axe.

On peut ainsi distinguer l'invariance point par point (les points de l'axe de symétrie sont invariants) et l'invariance globale d'une figure : des points restent fixes, d'autres s'échangent. On peut reprendre des exemples antérieurs comme la balle de tennis ou le zigzag dans le triangle ainsi que les axes de symétrie des figures usuelles, cerf-

volant, rectangle, losange, carré, mais avec une vision en termes de points et préciser quels points sont invariants (sur l'axe), quels points, quels segments s'échangent. A cette étape, on peut aussi faire le lien entre axe de symétrie d'un segment et médiatrice, axe de symétrie d'un couple de droites sécantes et bissectrice. Et dire pourquoi le parallélogramme non losange n'a pas d'axe de symétrie.

Je ne développe pas ce que seraient les étapes 7 et 8 : La symétrie axiale, transformation du plan parmi d'autres (symétrie centrale, translation, rotation), et outil de démonstration puis comme engendrant toutes les isométries du plan.

Pour conclure, je dirai seulement que le but de cet article est de soulever la question de la cohérence de l'enseignement des mathématiques sur toute la scolarité obligatoire et de proposer quelques pistes de réflexion dans ce sens pour l'enseignement de la symétrie axiale. Elles sont entièrement soumises à la discussion et j'espère qu'elles susciteront des réactions de collègues.